Notation

$A = [\bar{a}_1 \ \cdots \ \bar{a}_n] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (rappel)

colonnes de A dans $\mathbb{R}^m$

$A = \begin{bmatrix} \bar{\ell}_1 \\ \vdots \\ \bar{\ell}_m \end{bmatrix}$ lignes de A

$\bar{\ell}_i = (a_{i1} \ \cdots \ a_{in}) \in \mathbb{R}^n$

Déf (p.141)

$\mathrm{Col}(A) := \mathrm{Vect}\{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$

$\mathrm{Lgn}(A) := \mathrm{Vect}\{\bar{\ell}_1, \dots, \bar{\ell}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$

(ici on traite les vecteurs lignes comme de vecteurs de $\mathbb{R}^n$)!

QUE $\mathrm{Img}(A) = \mathrm{Col}(A)$?

$\boxed{\text{Oui}}$:)

COR. 7.41 $\mathrm{Lgn}(A) = \mathrm{Lgn}(\tilde{A})$

$\tilde{A}$ = FER de A

et les lignes non nulles de $\tilde{A}$ donnent une base de $\mathrm{Lgn}(A)$

THM. 7.42 Pour toute matrice $A \in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$

on a $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^T)$

où $\boxed{\text{rang}(A) := \dim(\text{Img}(A))}$

EXM 7.38 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Calculer → $\dim(\text{Col}(A))$; et $\text{rang}(A^T)$?
↳ $\dim(\text{Lgn}(A))$;

$\tilde{A}$ FER

$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 13/3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\text{Img}(A) = \text{Col}(A)$

colonnes avec pivots

colonnes-pivots

Alors $\dim(\mathrm{Col}(A)) = 2$

De même $\dim(\mathrm{Lgn}(A)) = \#$ lignes nonnulles de $\tilde{A}$

$= 2$

Et

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \dim(\mathrm{Col}(A)) = 2$$

Chapitre 8 : Coordonnées

Lemme 8.1 Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ une base d'un EV V. Alors,

$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$
implique $\lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$.

Déf. 8.2 Pour $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base d'un EV V et $v \in V$, on définit le vecteur de coordonnées de v relatives à la base $\mathcal{B}$ comme le vecteur colonne $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

(ce vecteur colonne est unique par le Lemme 8.1 !)

Notation

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \leftarrow \text{vecteur (colonne) de coordonnées.}$$

EXM 8.6

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathbb{R}^2$

Soit $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Calculer $[v]_{\mathcal{B}}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 - 7\lambda_2 = x_1 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = x_2 \end{cases} \text{SEL}$$

Résolution

...

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{3x_1 + 7x_2}{13} \\ \lambda_2 = \dfrac{-x_1 + 2x_2}{13} \end{cases}$$

$\mathcal{B}_{can} = \{1, t, t^2\}$

$\boxed{\text{EXM}}$ Soit $\mathcal{B} = \{1+t+t^2, t+t^2, t^2\}$

(base de $\mathbb{P}_2$)

Soit $p = 1 + 2t \rightsquigarrow [p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$?

$$\boxed{[1+2t]_{\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$1+2t = \lambda_1 (1+t+t^2) + \lambda_2 (t+t^2) + \lambda_3 t^2$$

$$= \lambda_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) t + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) t^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 2, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = -2$$

Donc $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\square$

PROP 8.8 | Si $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V, alors l'application

$$\begin{aligned} V &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto [v]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

est une application linéaire bijective.

Déf 8.9 Soit V et V' deux EV,

$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ base de V, $\mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_m\} \subseteq V'$ base de V', $T : V \longrightarrow V'$ une AL, on définit la <u>matrice de T relative aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$</u> par (ou représentation matricielle de T...)

$$[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} := \underbrace{\Big[[T(v_1)]_{\mathcal{B}'} \ \cdots \ [T(v_n)]_{\mathcal{B}'} \Big]}_{\in \mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})}$$

EXM 8.11

$T : \mathbb{P}_3 \longrightarrow \mathbb{P}_2$ $\quad \mathcal{B}_{can} = \{1, t, t^2, t^3\}$

$T(p) = p'$ $\quad \mathcal{B}'_{can} = \{1, t, t^2\}$

dérivée de p !

Calculer $[T]_{\mathcal{B}'_{can} \leftarrow \mathcal{B}_{can}}$

$$[T]_{\mathcal{B}'_{can} \leftarrow \mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$T(1) = 0$, $\quad T(t) = 1$, $\quad T(t^2) = 2t$, $\quad T(t^3) = 3t^2$

$[T(1)]_{\mathcal{B}'_{can}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad [T(t)]_{\mathcal{B}'_{can}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad [T(t^2)]_{\mathcal{B}'_{can}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad [T(t^3)]_{\mathcal{B}'_{can}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

THM 8.10 Avec les mêmes hypothèses que dans la déf. précédente et $v \in V$:

$$[T(v)]_{\mathcal{B}'} = [T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

EXM. 8.12

$$T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \mathcal{B}_{can} = \{1, t, t^2\}$$

$$T(p) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(1) \end{pmatrix} \qquad \mathcal{B}'_{can} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Calculer $[T]_{\mathcal{B}'_{can} \leftarrow \mathcal{B}_{can}}$ et $[T(9-2t+7t^2)]_{\mathcal{B}'_{can}}$.